Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Stäckel, Paul** (1862 – 1919)

Titel: **Eine von Gauss gestellte Aufgabe des Minimums**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1917, 11

Wie erst neuerdings bekannt geworden ist, hat Gauß Andeutungen über ein Verfahren gegeben, das Minimum einer Funktion von mehreren Veränderlichen zu bestimmen, wenn Ungleichheitsbedingungen vorgelegt sind. Die wirkliche Durchführung erfordert, wie der Verfasser zeigt, teils Erörterungen im Gebiete der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, teils die Integration gewisser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Durch die dabei auftretenden Kurven schnellster Abnahme erhält man einen neuen Eingang in die Lehre von den Euler-Lagrangeschen Multiplikatoren, und zugleich ergibt sich ein neues Verfahren zur Lösung der Gaußschen Aufgabe, bei dem man mit den üblichen Mitteln (Differentiation und Elimination) ausreicht.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1917 , S. XXIX - XXX)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1917. 11. Abhandlung

Eine von Gauss gestellte Aufgabe des Minimums

Von

PAUL STÄCKEL
Heidelberg

Eingegangen am 14. August 1917

Heidelberg 1917
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1387

Einleitung

„Es ist sehr merkwürdig," sagt GAUSS in der Abhandlung über ein neues Grundgesetz der Mechanik vom Jahre 1829, „daß die freien Bewegungen, wenn sie mit den notwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modifiziert werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf untereinander durch notwendige Abhängigkeit verknüpfte Größen beziehen" (Werke, Bd. V, S. 28). Von dem Gedanken, als Maß der Abweichung eines Wertesystems gegen ein ausgezeichnetes Wertesystem die Summe der Quadrate der einzelnen Abweichungen zu wählen, hat GAUSS noch eine dritte Anwendung gemacht, und zwar bei der Frage nach dem Minimum einer Funktion von mehreren Veränderlichen, wenn zwischen diesen noch Ungleichheitsbedingungen vorgelegt sind. Wir kennen hierüber nur die Andeutungen, die er in einer Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate im Wintersemester 1850/51 gemacht und über die einer der Zuhörer, A. RITTER, in seiner Dissertation vom Jahre 1853 einen freien Bericht gegeben hat; die betreffenden Stellen der Ausarbeitung der Vorlesung und der Abhandlung RITTERS sind neuerdings in den Werken von GAUSS, Bd. X 1, S. 469—481 abgedruckt worden.

Im folgenden wird zunächst über das von GAUSS angedeutete Verfahren berichtet, das auf der Benutzung der „Kurven schnellster Abnahme" für die gegebene Funktion beruht (§ 1). Wenn man versucht, das Verfahren durchzuführen, so muß erstens die durch die vorgelegten Ungleichheiten erklärte Wertemenge genauer untersucht werden (§ 2), man hat zweitens die Differentialgleichungen der Kurven schnellster Abnahme aufzustellen und zu integrieren (§ 3), und es ist drittens zu erörtern, ob man die Stellen des Minimums wirklich erhält (§ 4). Bei dem von GAUSS in der Vorlesung behandelten Beispiel, wo lineare Ungleichheiten auftreten, läßt sich zeigen, daß das Verfahren mit einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziele führt (§ 5, 6). Die Betrachtung der Kurven schnellster Abnahme führt zu einer einfachen Begründung der Methode der EULER-LAGRANGEschen Multiplikatoren für Aufgaben des relativen Extremums, und von hier aus gelangt man auch zu einem neuen Verfahren für Aufgaben mit Ungleichheitsbedingungen, das im Gegensatz zu dem GAUSSschen keine Integrationen erfordert (§ 7). Zum Vergleich wird schließlich das neue Verfahren auf das Beispiel von GAUSS angewandt (§ 8).

§ 1

Die Andeutungen von GAUSS

Zunächst sollen die Andeutungen von GAUSS in der Form, in der sie vorliegen, wiedergegeben werden. Ob RITTER die Meinung von GAUSS überall richtig getroffen hat, muß dahingestellt bleiben. Jedenfalls läßt sich daraus der Grundgedanke entnehmen, auf dem das Verfahren von GAUSS beruht, und es wird in den folgenden drei Paragraphen gezeigt werden, wie sich dessen Durchführung im einzelnen gestaltet.

AUFGABE. Unter allen „möglichen" Wertesystemen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soll dasjenige gesucht werden, das eine gegebene Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu einem Minimum macht, wenn als „möglich" nur diejenigen Wertesysteme gelten, bei denen m vorgelegte Ungleichheiten

$$\varphi_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt sind; dabei sei $m \geq n$.

LÖSUNG. Die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ mögen als rechtwinklige kartesische Koordinaten eines Punktes in einem Euklidischen Raume von n Dimensionen aufgefaßt werden. Durch die Ungleichheiten

$$\varphi_\mu(x_1, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

wird der Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ auf ein begrenztes Raumstück R_n von n Dimensionen eingeschränkt, und zwar besitzt R_n m Grenzmannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen, in denen je eine der m Funktionen φ_μ verschwindet, während die andern $m-1$ positiv ausfallen.

Zunächst bestimme man nach den bekannten Regeln den Punkt $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, der das absolute Minimum der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ liefert. Wenn alsdann die Ausdrücke $\varphi_\mu(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ sämtlich $\geqq 0$ sind, so ist die Aufgabe gelöst, und es ist so gut, als ob gar keine Ungleichheiten vorgelegt gewesen wären.

Im entgegengesetzten Falle liegt der gesuchte Punkt des Minimums auf der Begrenzung des Raumstückes R_n. Um ihn zu finden, gibt Gauss folgende Vorschrift. Man gehe aus von einem solchen Punkte $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ der Begrenzung, in dem n der Funktionen φ_μ verschwinden, während die übrigen $m-n$ positiv ausfallen, und bestimme die Richtung, in der man auf der Begrenzung fortschreiten muß, damit die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ am schnellsten abnimmt, das heißt, bei der eine gegebene unendlich kleine Änderung der Funktion f durch die geringste Änderung des Wertesystems $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ erreicht wird. Wenn das Wertesystem $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in das Wertesystem $(x_1, \ldots, x_n)$ übergeht, so gilt als Maß der Änderung die Summe der Quadrate der einzelnen Änderungen, also die Größe

$$(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + \cdots + (x_n-\xi_n)^2 . \tag{2}$$

Man erhält auf diese Art eine Kurve, die auf einer der n durch den Ausgangspunkt gehenden Grenzmannigfaltigkeiten liegt. Durchläuft man sie in dem Sinne, daß die Funktion f abnimmt, so gelangt man entweder zu einem Punkt, wo das Abnehmen ins Zunehmen übergeht, und dann ist die Aufgabe gelöst, oder zu einem Punkt, wo die gewählte Grenzmannigfaltigkeit an eine andere stößt und hat jetzt von neuem die Richtung zu bestimmen, in der die Funktion f am schnellsten abnimmt. Diese Richtung liegt entweder innerhalb der anstoßenden Grenzmannigfaltigkeit, auf der man dann weiter zu gehen hat, oder sie gehört der $(n-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit an, in der sich die beiden $(n-1)$-fach ausgedehnten Grenzmannigfaltigkeiten schneiden, und dann verläuft der nächste Teil der Untersuchung in dieser $(n-2)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit.

Indem man so fortfährt, gelangt man schließlich zu einem Punkte einer $(n-r)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die durch den Schnitt von r der Mannigfaltigkeiten $\varphi_\mu=0$ bestimmt ist und auf der die übrigen $m-r$ Funktionen φ_μ positiv ausfallen, von der Beschaffenheit, daß alle „möglichen“ Änderungen mit einer Vergrößerung der Funktion f verbunden sind, und damit ist die Stelle des Minimums gefunden.

Die r Ungleichheiten $\varphi_\mu > 0$, die zu der zuletzt auftretenden $(n-r)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit gehören, heißen die „wirksamen“ Ungleichheiten, denn die Lösung der Aufgabe würde genau die nämliche gewesen sein, wenn die wirksamen Ungleichheiten als Gleichungen vorgelegt, die übrigen aber von vornherein weggelassen worden wären.

§ 2

Das Raumstück S_n

Wenn nunmehr den Andeutungen nachgegangen wird, die uns über die Gedanken von GAUSS überliefert sind, so möge man darin keine Kritik, sondern nur Ergänzungen sehen, die allerdings unentbehrlich sind, wenn das Verfahren mit Erfolg durchgeführt werden soll.

Zunächst ist die durch die Ungleichheiten (1) erklärte Wertemenge genauer zu untersuchen. Dabei möge von der Voraussetzung abgesehen werden, daß $m > n$ ist, vielmehr m ganz beliebig bleiben. Dagegen soll die vereinfachende Annahme gemacht werden, daß es ein Wertesystem $(a_1, \ldots, a_n)$ gibt, für das die m Funktionen φ_μ positiv sind; wollte man hier die volle Allgemeinheit wahren, so würden sehr umständliche Betrachtungen erforderlich werden. Aus der vorauszusetzenden Stetigkeit der Funktionen φ_μ folgt dann, daß es eine zusammenhängende n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit S_n gibt, die den Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ in ihrem Innern enthält und für deren innere Punkte die Ungleichheiten (1) gelten, während für jeden Punkten der $(n-1)$-fach ausgedehnten Begrenzung mindestens eine der Funktionen φ_μ verschwindet; es ist möglich, daß es $(n-1)$-fach ausgedehnte Teile der Begrenzung gibt, in denen gleichzeitig mehrere der Funktionen φ_μ gleich Null sind.

Die durch die Ungleichheiten (1) erklärte Punktmenge kann Punkte enthalten, die dem Raumstück S_n nicht angehören; solche Punkte werden ihrerseits zusammenhängende Mannigfaltigkeiten bilden, deren Dimensionenzahl zwischen n und 0 liegt. Für jede von ihnen ist dieselbe Untersuchung anzustellen, wie sie hier für das Raumstück S_n durchgeführt wird; dabei macht die Anzahl der Dimensionen keinen wesentlichen Unterschied.

In jedem Punkte der $(n-1)$-fach ausgedehnten Begrenzung des Raumstückes S_n verschwindet mindestens eine der Funktionen φ_μ. Wenn aber umgekehrt eine der Funktionen φ_μ gleich Null ist, so kann das außerhalb des Raumstückes S_n, innerhalb und auf der Begrenzung geschehen. Die Punkte, in denen eine bestimmte Funktion φ_μ auf der Begrenzung verschwindet, brauchen keine $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten zu bilden. Hat man zum Beispiel für $n=3$ die Funktionen

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \quad \varphi_3 = x_1^2 + x_2^2, \tag{3}$$

so besteht die Begrenzung von S_3 aus zwei durch die x_3-Achse gehenden Halbebenen, auf denen beziehungsweise φ_1 und φ_2 verschwinden, und φ_3 verschwindet nur in der x_3-Achse. Man erkennt, daß die dritte Ungleichheit überflüssig ist und weggelassen werden darf. Dasselbe gilt auch allgemein, wenn die Punkte, in denen eine Funktion φ_μ auf der Begrenzung verschwindet, keine $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden; denn wegen der Stetigkeit der Funktionen φ_μ gehören alle Punkte der Begrenzung von S_n zu $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeiten, in denen eine der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ verschwindet. Daß eine der weggelassenen Funktionen etwa im Innern von S_n gleich Null ist, hat nichts zu sagen, weil dadurch von S_n keine Punkte ausgeschlossen werden. Mithin darf man von vornherein annehmen, daß die Begrenzung des Raumstückes S_n aus m Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen besteht, in denen mindestens je eine der Funktionen φ_μ verschwindet, und erhält so m Grenzflächen $F_1, \dots, F_m$. Wenn in einer solchen Grenzfläche mehr als eine Funktion φ_μ verschwindet, ist es allerdings zweifelhaft, zu welcher der Funktionen man sie rechnen soll. Jedoch gilt das immer nur für einen Teil der $(n-1)$-fach ausgedehnten Grenzmannigfaltigkeiten $\varphi_\mu=0$, denn wenn für jeden Punkt einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die zu der Begrenzung von S_n gehört und in dem φ_μ verschwindet, noch eine andere der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ gleich Null wäre, wobei in verschiedenen Teilen der Mannigfaltigkeit verschiedene Funktionen zu der betrachteten hinzutreten könnten, so darf diese weggelassen werden. Daß Funktionen φ_μ, die an der Begrenzung von S_n keinen Anteil haben, nicht berücksichtigt zu werden brauchen, ist selbstverständlich.

Nachdem so die Reihe der Funktionen φ_μ ausgesondert ist, die für das Raumstück S_n allein in Betracht kommen, sollen die durch ihr Verschwinden gekennzeichneten Grenzflächen $F_1, \ldots, F_m$ genauer untersucht werden.

Jede Grenzfläche F_μ ist ihrerseits begrenzt von $(n-2)$-fach ausgedehnten Grenzmannigfaltigkeiten, in denen mindestens je zwei der Funktionen φ_μ verschwinden. Es können aber darin auch mehr als zwei dieser Funktionen gleich Null sein.

Man wird weiter gehen und Grenzmannigfaltigkeiten erhalten, die der Reihe nach von den Dimensionen $n-2$, $n-3, \ldots$ sind. Wenn $m \geq n$ ist, kann man bis zu Grenzpunkten gelangen, in denen mindestens n der Funktionen φ_μ verschwinden, es braucht aber auch in diesen Fällen keine solchen Punkte zu geben, und dann läßt sich die Vorschrift nicht erfüllen, daß man bei der Wanderung auf der Grenze von S_n von einem Punkt ausgehen soll, in dem n der Funktionen φ_μ verschwinden. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausnahmefall nur dann eintreten kann, wenn das Raumstück S_n sich ins Unendliche erstreckt. Falls die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine im Endlichen liegende Stelle des Minimums besitzt, wird man von einem solchen Raumstück S_n durch eine Ungleichheit $\varphi_{m+1} \geq 0$ einen im Endlichen liegenden Teil abschneiden können, der die Stelle des Minimums enthält, und so die Forderung für den Ausgangspunkt zu erfüllen versuchen.

Aber auch wenn das Raumstück ganz im Endlichen liegt, stößt man auf Schwierigkeiten. Betrachtet man zum Beispiel ein Achtflach, das von acht Dreiecken gebildet wird, die zu je vier in jeder der sechs Ecken zusammenstoßen, so gibt es sechs Grenzpunkte, in denen je vier der Funktionen φ_μ verschwinden, also mehr als drei, wie es doch beim Ausgangspunkte gefordert wurde. Indessen hat die von GAUSS vorgeschriebene Wahl des Ausgangspunktes für die Durchführung des Verfahrens keine wesentliche Bedeutung und wurde von ihm wohl nur getroffen, um eine bestimmte Annahme zu machen. Es wird sich später ergeben, daß, allgemein gesprochen, der Ausgangspunkt innerhalb gewisser Gebiete der Begrenzung von S_n beliebig gewählt werden darf, daß aber, wenn man aus einem solchen Gebiet heraustritt, das Verfahren zu einer anderen Stelle des Minimums führt.

§ 3

Die Kurven schnellster Abnahme

Von dem Ausgangspunkt A, der irgendwo auf der Begrenzung von S_n gewählt sei, soll man nach der Vorschrift so weitergehen, daß die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ möglichst schnell abnimmt. Es ist am einfachsten, den Punkt $A(x_1, \ldots, x_n)$ in das Innere irgend einer der m Grenzflächen F_μ zu legen, sodaß seine Umgebung durch die eine Gleichung $\varphi = 0$ bestimmt wird. Für die Umgebung von A werden die Punkte $A'(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n)$ durch die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} dx_\nu = 0 \tag{4}$$

bestimmt. Wird die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu = 0 \tag{5}$$

hinzugenommen, so erhält man ein $(n-2)$-fach ausgedehntes Element der Schnittmannigfaltigkeit $\varphi=0$, $f=\text{const.}$, das durch den Punkt A' hindurchgeht. Von den n Differentialen $dx_1, \ldots, dx_n$ bleiben dabei $n-2$ willkürlich, während die übrigen zwei durch die Gleichungen (4) und (5) bestimmt sind.

Damit beim Fortgang von A zu einem benachbarten Punkte $B(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n)$ die gegebene Abnahme der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ möglichst schnell erfolgt, wie es das Verfahren von GAUSS fordert, muß man auf der Grenzfläche $\varphi = 0$ vom Punkt A zu einem solchen Punkt B des Elementes der Schnittmannigfaltigkeit übergehen, daß AB ein Minimum ist. Das zieht aber nach sich, daß AB senkrecht auf dem Elemente steht. Folglich muß erstens

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = 0 \tag{6}$$

sein, und zweitens die Bedingung des Senkrechtstehens erfüllt werden:

(7) $$\sum_{\nu=1}^{n} dx_\nu \delta x_\nu = 0\,,$$

und zwar für alle zulässigen Wertesysteme $dx_1, \ldots, dx_n$, das heißt, für alle Wertesysteme, die den Gleichungen (4) und (5) genügen. Eine leichte Rechnung ergibt, wenn zur Abkürzung

(8) $$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right)^2 = [\varphi\varphi]\,, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = [\varphi f]$$

gesetzt wird, die Werte

(9) $$\delta x_\nu = \left\{ [\varphi\varphi] \frac{\partial f}{\partial x_\nu} - [\varphi f] \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right\} \delta t\,,$$

wo δt einen infinitesimalen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Die Gleichungen (9) sind gleichbedeutend mit einem System von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Veränderlichen. Man kennt von ihnen die Integralgleichung $\varphi = \text{const.}$ und hat sie für den vorliegenden Zweck mit der Maßgabe zu integrieren, daß $\varphi = 0$ ist. Auf der Grenzfläche $\varphi = 0$ erhält man dann die durch den Anfangspunkt A gehende Kurve schnellster Abnahme.

Nach der Vorschrift von GAUSS hat man auf der Kurve schnellster Abnahme in dem Sinne weiter zu gehen, daß die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ abnimmt, und die in § 1 angegebenen Betrachtungen anzustellen. Für jede neue Grenzmannigfaltigkeit, in die man gelangt, ist ein System von $n-1$ gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Veränderlichen aufzustellen und zu integrieren, das die zugehörigen Kurven schnellster Abnahme liefert.

Handelt es sich zum Beispiel um eine Grenzmannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen, die durch zwei Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ gegeben wird, so ist in sinngemäßer Verallgemeinerung der vorhergehenden Auseinandersetzung das dem Ausgangspunkt $A(x_1, \ldots, x_n)$ benachbarte, $(n-3)$-fach ausgedehnte Element der Schnittmannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $f = \text{const.}$ durch die drei Gleichungen zu erklären:

$$(10)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\,dx_\nu=0\,,\quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_\nu}\,dx_\nu=0\,,\quad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\,dx_\nu=0\,,$$

und die zur Kurve schnellster Abnahme gehörenden Differentiale $\delta x_1,\ldots,\delta x_n$ genügen dann den Gleichungen

$$(11)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\,\delta x_\nu=0\,,\quad \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\,\delta x_\nu=0\,,\quad \sum_{\nu=0}^{n}dx_\nu\,\delta x_\nu=0\,.$$

Unter Benutzung des Symbols

$$(12)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial v}{\partial x_\nu}=[uv]$$

ergeben sich hieraus die Werte

$$(13)\qquad \delta x_\nu=\begin{vmatrix}[\varphi\varphi] & [\varphi\psi] & [\varphi f]\\ [\psi\varphi] & [\psi\psi] & [\psi f]\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_\nu} & \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}\end{vmatrix}\cdot\delta t\,.$$

Die Differentialgleichungen (13) besitzen die Integralgleichungen $\varphi=$const. und $\psi=$const.; für den vorliegenden Zweck sind sie mit der Maßgabe zu integrieren, daß $\varphi=0$, $\psi=0$ ist.

Die Verallgemeinerung auf Grenzmannigfaltigkeiten, die durch r Gleichungen zwischen $x_1,\ldots,x_n$ erklärt werden, ist hiernach einleuchtend.

§ 4

Die Ermittelung des Minimums

Gesetzt, man habe die in der Integration der Differentialgleichungen für die Kurven schnellster Abnahme liegenden Schwierigkeiten überwunden, so ist die Lösung der Aufgabe keineswegs vollständig erledigt. Wir wollen zunächst annehmen, daß man bei der Wanderung auf solchen Kurven zu einem Punkte M gelangt sei, bei dem die Abnahme in eine Zunahme übergeht. Hat in ihm die Funktion $f(x_1,\ldots,x)_n$ wirklich ein Minimum? Damit das der Fall ist, muß beim Fortschreiten von M in jeder „möglichen“ Richtung der Wert der Funktion zunehmen; dabei genügt es, die Richtungen zu untersuchen, die den durch M gehenden Grenzmannigfaltigkeiten angehören.

Beispiele werden hier gute Dienste tun. Die Grenzmannigfaltigkeit sei eine Ebene, deren Punkte durch rechtwinklige kartesische Koordinaten x, y bestimmt werden. Es sei ferner

$$f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}\,. \tag{14}$$

Die Kurven $f=$const. sind die durch den Ursprung des Koordinatensystems O gehenden Geraden, mithin werden die Kurven schnellster Abnahme die um O beschriebenen Kreise. Wird als Ausgangspunkt A irgend ein von O verschiedener Punkt der x-Achse gewählt, so ist für ihn immer $f=1$, und wenn man den durch ihn gehenden Kreis mit abnehmenden x durchwandert, so nimmt $f(x, y)$ ab, bis man in der y-Achse den Wert $f=0$ erreicht. Von hier ab findet wieder Zunahme statt. Mithin ist der Punkt auf der y-Achse ein Punkt M. Er liefert jedoch kein Minimum, weil für alle von O verschiedenen Punkte der y-Achse $f=0$ ist; der Wert Null ist hier zwar die untere Schranke der Funktionswerte, aber nicht ein Minimum.

Aber auch wenn der gefundene Punkt M ein Minimum liefert, ist die Aufgabe keineswegs immer vollständig gelöst. Es sei etwa

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)+1\,. \tag{15}$$

Als Quadrat des absoluten Betrages der Funktion z^2-1 der komplexen Veränderlichen $x+iy$ hat $f(x,y)$ für reelle Werte von x und y positive Werte, wenn z^2-1 von Null verschieden ist, und verschwindet nur, wenn $z^2-1=0$ ist, also nur an den beiden Stellen $x=\pm1$, $y=0$. Damit hat man die Stellen des Minimums gefunden. Die Kurven schnellster Abnahme sind die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=\text{const.} \tag{16}$$

Man beweist leicht, daß eine solche Kurve durch den Punkt $x=+1$, $y=0$ geht, falls der Anfangspunkt A eine positive Abszisse besitzt, und durch den Punkt $x=-1$, $y=0$, falls die Abszisse von A negativ ist. Hieraus folgt, daß die Wahl des Anfangspunktes nicht gleichgültig ist, vielmehr bedarf es einer Erörterung des Verlaufes aller Kurven schnellster Abnahme, wenn man alle Stellen des Minimums erhalten will.

Wenn man, wie es in der Lehre vom Extremum üblich ist und im vorhergehenden stillschweigend vorausgesetzt wurde, die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ im Gebiete der Wertesysteme, für die die Ungleichheiten (1) gelten, als eindeutig annimmt, so wird die Begrenzung des Raumstückes S_n von den Mannigfaltigkeiten $f=\text{const.}$ einfach und lückenlos überdeckt, und es geht daher, von singulären Stellen abgesehen, durch einen Punkt der Begrenzung auch nur eine Kurve schnellster Abnahme.

Das Auftreten singulärer Stellen wird durch das Beispiel (15) erläutert: Die Stellen eines Extremums sind immer solche singulären Stellen, an denen durch einen Punkt der Begrenzung unzählig viele Kurven schnellster Änderung gehen. Die von einem solchen Punkt ausstrahlenden Kurven werden ein gewisses Gebiet der Begrenzung bedecken, und diese wird daher in Teilbereiche zerlegt werden können, sodaß, je nachdem man den Anfangspunkt in dem einen oder dem anderen Bereich wählt, die eine oder die andere Stelle des Extremums erhalten wird.

Die Stellen des Extremums erscheinen bei dieser Auffassung als singuläre Stellen der Integrale eines Systems von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, und zwar als Knotenpunkte, durch die unendlich viele Integralkurven gehen. Das erste Beispiel (14) zeigt, daß bei der Integration auch Wirbelpunkte auftreten können; solche Punkte führen zu keinem Extremum. Aber auch die Möglichkeit kann verwirklicht werden, daß man einen Strudelpunkt erhält, dem sich die Integralkurve asymptotisch nähert. Ein solcher Strudelpunkt kann sehr wohl Stelle des Minimums sein, und dann tritt der Fall ein, daß das Verfahren von Gauss nicht ausreicht, obwohl ein Minimum vorhanden ist. Leider fehlt es hier an einem Beispiel, das an Einfachheit den beiden schon gegebenen gleichkommt; wenn man nämlich in der Ebene von den bekannten Formen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit einem Strudelpunkt ausgeht, so gelangt man rückwärts zu Funktionen $f(x,y)$, für die der Strudelpunkt eine Stelle der Unbestimmtheit ist, sodaß kein Minimum herauskommen kann. Verwickeltere Überlegungen haben zwar zum Ziel geführt, sollen jedoch hier nicht mitgeteilt werden.

§ 5

Das Beispiel von GAUSS: a) Die linearen Ungleichheiten

In der Vorlesung vom Wintersemester 1850/51 hat GAUSS folgendes Beispiel betrachtet. Es sei

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 , \tag{17}$$

und die Ungleichheitsbedingungen mögen durch lineare Funktionen gegeben werden:

$$\varphi_\mu(x_1, \dots, x_n) = a_{0\mu} + a_{1\mu} x_1 + \dots + a_{n\mu} x_n . \tag{18}$$

In Übertragung der für $n=3$ geltenden Ausdrucksweise soll also der Punkt kleinsten Abstandes von einem der Gebiete bestimmt werden, das durch die Ebenen $\varphi_\mu = 0$ begrenzt wird, nämlich in denjenigen, wo überall $\varphi_\mu \geq 0$ wird.

Wenn der Ursprung O innerhalb des Gebietes oder auf dessen Begrenzung liegt, so ist er selbst die Stelle des Minimums. Mithin darf von vornherein vorausgesetzt werden, daß O außerhalb liegt.

Wie man sofort ersieht und durch die in § 3 angegebenen Formeln bestätigt, sind die Kurven schnellster Abnahme gerade Linien. Zur Durchführung des Verfahrens von GAUSS hat man daher nur noch die Beschaffenheit des Gebietes zu ermitteln, das durch die Ungleichheiten $\varphi_\mu \geq 0$ erklärt wird, und zu untersuchen, ob man dabei wirklich die Stellen des Minimums erhält.

Es kann sehr wohl vorkommen, daß es überhaupt keinen Punkt gibt, der den vorgelegten Ungleichheiten genügt, oder daß nur ein einziger solcher Punkt vorhanden ist. Wenn man aber zwei solche Punkte $P'(x_1', \dots, x_n')$ und $P''(x_1'', \dots, x_n'')$ kennt, so lassen sich daraus unzählig viele andere herleiten, die gleichfalls die Ungleichheiten befriedigen. Setzt man nämlich

$$x_\nu = (1-t)x_\nu' + t x_\nu'' \tag{19}$$

und läßt die Veränderliche t von 0 bis 1 wachsen, so ist, wenn die Werte von φ_μ in den Punkten P' und P'' mit φ_μ' und φ_μ'' bezeichnet werden:

$$\varphi_\mu = (1-t)\varphi_\mu' + t\varphi_\mu'' , \tag{20}$$

und wenn t zwischen 0 und 1 liegt, ist dieser Ausdruck $\geqq 0$. Man kann diese Tatsache so ausdrücken, daß mit den Punkten P'

und P'' auch ihre Verbindungsstrecke $P'P''$ dem Gebiete der Punkte angehört, für das die vorgelegten Ungleichheiten erfüllt sind.

Hieraus folgt, daß die betrachteten Punkte ein zusammenhängendes Gebiet bilden. Das Gebiet braucht aber nicht n-fach ausgedehnt zu sein, es kann auch weniger als n Dimensionen haben. Wenn das der Fall ist, kann man die Untersuchung von vornherein auf einen Euklidischen Raum von weniger als n Dimensionen beschränken. Es gilt nämlich der Satz:

Ist in einem Euklidischen Raum von n Dimensionen ein $(n-r)$-fach ausgedehntes Gebiet gegeben, das durch k lineare Ungleichheiten in n Veränderlichen ausgeschieden wird, so läßt es sich auch durch lineare Ungleichheiten in $n-r$ Veränderlichen erklären.

Weil das Gebiet nur $n-r$ Dimensionen hat, liegt es zunächst in einem Euklidischen Raum von $n-r$ Dimensionen, und seine Grenzflächen werden durch lineare Gleichungen in $n-r$ Veränderlichen, $\psi_\varkappa=0$, gegeben. Macht man jetzt den Ansatz:

$$\varepsilon_\varkappa \psi_\varkappa \geq 0 \,, \tag{21}$$

so können die Konstanten $\varepsilon_\varkappa = \pm 1$ so bestimmt werden, daß durch diese Ungleichheiten genau das gegebene Gebiet erklärt wird. Die Vorzeichen $\varepsilon_\varkappa$ ergeben sich, wenn man von irgend einem Punkte der betreffenden Grenzfläche $\psi_\varkappa=0$ ins Innere des Gebietes geht. Es bleibt demnach nur noch übrig zu zeigen, daß nicht etwa verschiedene Punkte einer Grenzfläche zu verschiedenen Vorzeichen führen. Wäre das aber der Fall, so würden auf beiden Seiten der Grenzfläche Punkte des Gebietes liegen, und das ist mit der Eigenschaft, daß die Verbindungsstrecke von je zwei Punkten des Gebietes diesem ganz angehört, nicht verträglich.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß es ausreicht, den Fall zu untersuchen, wo das Gebiet der Punkte, die den Ungleichheiten $\varphi_\mu \geq 0$ genügen, eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen bildet; sie möge wieder mit S_n bezeichnet werden.

§ 6

Das Beispiel von GAUSS: b) Nachweis der Existenz des Minimums.

Die Funktion $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ ist stetig, und es gibt daher im Gebiete S_n mindestens einen Punkt, wo sie gleich ihrer unteren

Schranke für das Gebiet wird. Hieraus folgt noch nicht die Existenz einer Stelle des Minimums, diese wird jedoch in dem vorliegenden Fall dadurch gesichert, daß es nur einen Punkt des Gebietes S_n geben kann, in dem die Funktion gleich ihrer unteren Schranke wird. Hätte man nämlich zwei solche Punkte, P' und P'', und wanderte auf der Verbindungsstrecke $P'P''$ von P' in der Richtung nach P'', so müßte die Funktion, da sie nicht denselben Wert behalten kann, wachsen, und dasselbe würde gelten, wenn man auf der Strecke von P'' nach P' wanderte. Mithin müßte es auf ihr einen Punkt Q geben, in dem die Funktion ein Maximum für die Punkte der Strecke aufweist, während doch beim Durchlaufen einer Strecke die Entfernung von einem festen Punkte niemals ein Maximum besitzt. Auf dieselbe Art erkennt man auch, daß es außer der Stelle des absoluten keine Stellen des relativen Minimums geben kann.

Es läßt sich ferner beweisen, daß das Verfahren von GAUSS in dem vorliegenden Fall nach einer endlichen Anzahl von Schritten zur Stelle des Minimums führt.

Man kann von vornherein erreichen, daß die ganze Betrachtung sich im Endlichen abspielt. Wenn nämlich das Gebiet S_n sich ins Unendliche erstreckt, so braucht man nur einen Punkt P des Gebietes zu nehmen und durch ihn die $(n-1)$-fach ausgedehnte Ebene zu legen, die auf OP senkrecht steht, bei der also alle Punkte von O mindestens die Entfernung OP haben. Ist $\varphi_{m+1}=0$ die geeignet normierte Gleichung dieser Ebene, so wird durch die Ungleichheit $\varphi_{m+1} > 0$ ein ins Unendliche gehendes Stück von S_n abgesondert, und es bleibt ein endliches Gebiet mit derselben Stelle des Minimums übrig.

Der Ausgangspunkt A liege im Innern einer Grenzfläche G. Die Kurve schnellster Abnahme, auf der man von A aus fortzugehen hat, ist die Gerade, die A mit dem Fußpunkt F des von O auf G gefällten Lotes verbindet.

Liegt der Fußpunkt F im Innern von G, so gibt er bereits die Stelle des Minimums, und das Verfahren ist beendet.

Liegt F auf der Begrenzung von G, so kann er das Minimum liefern. Tut er es nicht, so muß man eine neue Grenzfläche G' betreten und kommt nie wieder auf G zurück. Denn die Funktion f nimmt beim Fortgehen beständig ab, bleibt also stets unter dem Wert, den sie in F annimmt, und dieses ist der kleinste Wert, dessen sie auf der Grenzfläche G fähig ist.

Liegt endlich der Fußpunkt F außerhalb G, so hat man an der Begrenzung von G angelangt zu ermitteln, ob man auf dieser weitergehen oder in die anstoßende Grenzfläche übertreten soll. Jetzt ist es sehr wohl möglich, daß man im Laufe des Verfahrens in die Grenzfläche G zurückkehrt, jedoch gilt für die Wege auf G folgende Überlegung. Wenn der Fußpunkt des Lotes von O auf die Ebene von G außerhalb G liegt, so bilde man den Grenzwert des Quotienten der Änderung von $f(x_1,\ldots,x_n)$ und der dabei auf irgend einer Geraden schnellster Abnahme von G durchlaufenen Strecke. Diese Grenzwerte haben jetzt eine von Null verschiedene untere Schranke u, und daher beträgt, wenn man auf G den Weg s durchläuft, die Änderung von $f(x_1,\ldots,x_n)$ mindestens $u \cdot s$.

Nach diesen Vorbereitungen betrachte man erstens diejenigen Grenzflächen G, bei denen der Fußpunkt des Lotes von O auf G außerhalb G liegt. Die betreffenden unteren Schranken u haben ihrerseits eine untere Schranke v. Wird daher der Ausgangswert von f mit f_0, der kleinste Wert von f mit k bezeichnet, so muß die Summe der Wege, die man auf diesen Grenzflächen durchwandert, kleiner sein als $(f_0-k):v$. Folglich kann man in eine solche Grenzfläche nur eine endliche Anzahl von Malen gelangen, und diese liefert daher nur eine endliche Anzahl von Stücken des Weges, der zu dem Anfangspunkt A gehört.

Zweitens kann eine Grenzfläche, auf deren Begrenzung der Fußpunkt des Lotes liegt, nur einmal an die Reihe kommen, aus ihr entspringt demnach nur ein Stück des Weges, der zu dem Anfangspunkt A gehört.

Dieselben Betrachtungen wiederholen sich, wenn man in eine der Grenzmannigfaltigkeiten der Dimension $n-2$ gerät, und so geht es weiter. Es gibt in der Begrenzung von S_n nur eine endliche Anzahl solcher Grenzmannigfaltigkeiten, denen der Reihe nach die Dimensionen $n-2, n-3, \ldots, 2, 1$ zukommen, und jede liefert nur eine endliche Anzahl endlicher Strecken, die dem von A aus durchwanderten Wege angehören. Hieraus folgt schließlich, daß die Stelle des Minimums nach einer endlichen Anzahl von Schritten erreicht wird.

Der Punkt kleinster Entfernung von O liegt gleichzeitig auf einer gewissen Anzahl von Ebenen $\varphi_\mu=0$. GAUSS nennt die betreffenden Ungleichheiten $\varphi_\mu \geqq 0$ wirksam, weil man zu derselben Lösung kommt, wenn die übrigbleibenden Ungleichheiten weggelassen werden. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß man unter Umständen auch von den wirksamen Ungleichheiten gewisse weglassen kann, ohne daß die Lösung sich ändert. Dies tritt ein, wenn durch den betreffenden Punkt mehr Grenzflächen hindurchgehen, als zu seiner Festlegung notwendig ist. Zum Beispiel kann im gewöhnlichen Raume bei einem Vielflach der Punkt kleinster Entfernung eine Ecke sein, in der mehr als drei Seitenflächen sich schneiden.

§ 7

Ein neues Verfahren zur Ermittelung der Stellen des Extremums.

In § 4 hatte sich ergeben, daß die Ermittelung der Stellen des Extremums darauf hinauskommt, die singulären Stellen der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, denen die Kurven schnellster Abnahme auf den Grenzmannigfaltigkeiten des Gebietes S_n genügen. Diese Stellen sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen alle Differentiale δx_ν gleichzeitig verschwinden. Für die singulären Stellen auf der $(n-1)$-fach ausgedehnten Grenzfläche $\varphi = 0$ erhält man also nach (9) die Gleichungen

$$[\varphi\varphi]\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - [\varphi f]\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Diese sind aber gleichbedeutend mit den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

für die Aufgabe des relativen Extremums der Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ mit der Nebenbedingung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, zu denen das Verfahren des EULER-LAGRANGEschen Multiplikators führt. Das entsprechende gilt, wie man leicht erkennt, für die Grenzmannigfaltigkeiten von $n-2, n-1, \ldots$ Dimensionen. Mithin wird man durch die Betrachtung der Kurven schnellster Änderung auf einem einfachen Wege zu der Methode der Multiplikatoren geführt; in der üblichen Darstellung erscheint diese als ein analytischer Kunstgriff, der erst nachträglich durch den Erfolg gerechtfertigt wird. Die Kurven schnellster Änderung verdienen es daher, in die Lehre vom Extremum eingeführt zu werden.

Die vorhergehenden Überlegungen geben aber auch die Grundlage für ein neues Verfahren zur Behandlung der Extrema mit Ungleichheitsbedingungen, bei dem es ausreicht, die Prozesse der Elimination und Differentiation anzuwenden, die man bei der Lösung der gewöhnlichen Aufgaben des Extremums zuzulassen pflegt.

Um darzulegen, wie die Durchführung sich im einzelnen gestaltet, genügt es, die Stellen des Minimums für ein Raumstück S_n im Sinne des § 2 zu ermitteln. Zu diesem Zwecke denke man sich die Reihe der Mannigfaltigkeiten aufgestellt, die durch irgend welche Systeme von Gleichungen $\varphi_\mu=0$ erklärt werden; ihre Dimensionen gehen von $n-1$ bis 0. Bei einem Vielfach S_3 wird zum Beispiel eine Anzahl unbegrenzter Ebenen und Geraden auftreten, und ihnen werden sich gewisse Punkte zugesellen. Nunmehr löse man das gewöhnliche Problem des Minimums für die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ mit den Nebenbedingungen, daß gewisse der Funktionen φ_μ verschwinden sollen; man beginnt dabei mit den Grenzflächen, bei denen eine der Funktionen φ_μ gleich Null ist, nimmt dann den Fall, daß irgend zwei dieser Funktionen verschwinden, usw. Schließlich gelangt man zu den Grenzpunkten, bei denen nur der Wert zu ermitteln ist, den die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ annimmt.

Für jede der so gewonnenen Stellen des Minimums bilde man die Reihe aller Funktionen φ_μ. Wenn auch nur eine davon negativ ausfällt, ist der betreffende Punkt auszuscheiden. Es bleiben die Punkte übrig, die auf der Begrenzung von S_n liegen, wenn es nämlich deren überhaupt gibt.

Liegt einer der so erhaltenen Punkte im Innern einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Grenzfläche, so liefert er ein Minimum. Liegt er dagegen auf ihrer Begrenzung, so kommt er nur in Betracht, wenn er gleichzeitig für die anstoßenden Grenzflächen ein Minimum ist.

Hat man ferner eine Stelle des Minimums für eine Grenzmannigfaltigkeit von weniger als $n-1$ Dimensionen, so ist zunächst wieder zu unterscheiden, ob er im Innern liegt oder nicht. Bei der ersten Möglichkeit ist zu prüfen, ob die Funktion in der ganzen $(n-1)$-fach ausgedehnten Umgebung des Punktes größer ausfällt als in dem betreffenden Punkte, was keineswegs immer stattfinden wird. Bei der zweiten Möglichkeit kommt der Punkt nur dann in Frage, wenn er gleichzeitig für alle anstoßenden Grenzmannigfaltigkeiten derselben Dimension, wie die betrachtete Grenzmannigfaltigkeit aufweist, ein Minimum ist, und wenn das gilt, so ist wiederum die ganze $(n-1)$-fach ausgedehnte Umgebung zu prüfen. Im äußersten Fall kommt man zu den Grenzpunkten, in denen mindestens n der Funktionen φ_μ verschwinden, und hat hier sogleich an die Prüfung der $(n-1)$-fach ausgedehnten Umgebung heranzutreten.

Die vorstehenden Überlegungen werfen ein neues Licht auf das Verfahren von GAUSS. Bei ihm hat man die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zu integrieren, denen die Kurven schnellster Abnahme genügen. Kann man die Integration leisten, so kennt man auch die singulären Punkte des Systems der Integralkurven, unter denen sich die Punkte des Extremums befinden. Der Unterschied gegen das neue Verfahren liegt jetzt darin, daß man bei diesem für alle Mannigfaltigkeiten, die sich durch Verbindungen der Gleichungen $\varphi_\mu=0$ erklären lassen, die Stellen des Extremums zu suchen hat, während bei der durch das Verfahren von GAUSS vorgeschriebenen Wanderung auf der Grenze von S_n gewisse Mannigfaltigkeiten ausgewählt werden, für die die Kurven schnellster Abnahme ermittelt werden müssen. Falls die vorgelegte Aufgabe so beschaffen ist, daß jene Integrationen sich leisten lassen, so kann eine Erleichterung darin liegen, daß man eine solche Auswahl trifft. Dies gilt für das von GAUSS behandelte Beispiel, und es soll daher zum Vergleich der beiden Methoden die Lösung auch nach dem neuen Verfahren durchgeführt werden.

§ 8

Anwendung auf das Beispiel von GAUSS

Zunächst hat man die Reihe der Mannigfaltigkeiten von $n-1$, $n-2$,... Dimensionen aufzustellen, die sich aus den Verbindungen der linearen Gleichungen $\varphi_\mu=0$ zu ein, zwei, drei,... ergeben.

Dann ist vom Ursprung O auf jede von ihnen das Lot zu fällen. Das bedeutet analytisch, daß der Ausdruck

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \tag{24}$$

unter der Bedingung zu einem Minimum zu machen ist, daß zwischen den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gewisse r lineare Gleichungen bestehen. Die Methode der Multiplikatoren führt sofort zu $n+r$ Gleichungen mit $n+r$ Unbekannten, deren Auflösbarkeit gesichert ist, weil das Vorhandensein der Stelle des Minimums feststeht. Es ist jedoch nicht schwer, die Auflösbarkeit auch rein algebraisch nachzuweisen.

Endlich hat man für die Fußpunkte der so erhaltenen Lote die Werte sämtlicher Funktionen φ_μ zu berechnen und diejenigen Punkte auszuscheiden, bei denen negative Werte der Funktionen φ_μ auftreten. Für die übrigbleibenden Punkte berechne man R^2 und ordne die so erhaltenen Werte nach ihrer Größe. Der kleinste von ihnen ist das gesuchte Minimum.

Man wird jedoch wünschen, ein Kennzeichen zu haben, das entscheidet, ob einer der zulässigen Fußpunkte das Minimum liefert oder nicht, ohne daß man die anderen Fußpunkte zu Hilfe zu nehmen braucht. Dies gelingt durch folgende Überlegung. Der betrachtete Punkt $F(a_1, \ldots, a_n)$ gehöre zu einer $(n-r)$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die etwa als Schnitt der Mannigfaltigkeiten $\varphi_1=0, \ldots, \varphi_r=0$ erklärt sei. Dann fragt es sich, ob der Wert von R abnimmt oder zunimmt, wenn man auf der Begrenzung des Gebietes S_n von F zu einem benachbarten Punkte $F'(a_1+\delta a_1, \ldots, a_n+\delta a_n)$ übergeht. Dabei ändert sich R^2 um den Betrag

$$2a_1\delta a_1 + \cdots + 2a_n\delta a_n + \delta a_1^2 + \cdots + \delta a_n^2 \,. \tag{25}$$

Hieraus folgt, daß in erster Annäherung das Vorzeichen von $a_1\delta a_1 + \cdots + a_n\delta a_n$ für die Art der Änderung entscheidend ist; bei einem Minimum muß es positiv sein. Eine besondere Untersuchung erfordert der Schnitt der Begrenzung von S_n mit der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit

$$a_1(\xi_1 - a_1) + \cdots + a_n(\xi_n - a_n) = 0 \,, \tag{26}$$

die als die durch F gehende, zum Fahrstrahl OF gehörende Normalmannigfaltigkeit gedeutet werden kann, und zwar findet stets eine Zunahme von R^2 statt, wenn man auf der Schnittmannigfaltigkeit in der Richtung von F weg geht. Hieraus folgt, daß ein Fußpunkt F dann und nur dann das Minimum liefert, wenn die in der Begrenzung liegende Umgebung ganz auf der einen Seite der zum Fahrstrahl OF gehörenden Normalmannigfaltigkeit liegt, diese selbst eingeschlossen.

Man überzeugt sich leicht, daß nicht nur die Umgebung der Stelle des Minimums, sondern auch das ganze Gebiet S_n auf der einen Seite der zu OF gehörenden Normalmannigfaltigkeit liegt. Denn gäbe es einen auf der anderen Seite liegenden Punkt P, so würde nach der Grundeigenschaft des Gebietes S_n auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke FP zu S_n gehören, mithin hätte man auch in der Umgebung von F Punkte, des Gebietes S_n, die auf der anderen Seite der Normalmannigfaltigkeit lägen, gegen die Voraussetzung. Wohl aber kann S_n sogar einen $(n-1)$-fach ausgedehnten Teil der Normalmannigfaltigkeit in sich fassen; dies tritt zum Beispiel ein, wenn das Minimum für einen innerhalb einer der Grenzflächen $\varphi_\mu=0$ liegenden Fußpunkt stattfindet.

CARL WINTER'S UNIVERSITÄTSBUCHHANDLUNG
ABT. DRUCKEREI ▫ ▫ HEIDELBERG